

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DA UFBA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

1ª LISTA DE CÁLCULO IV – SEMESTRE 2002.1
(Função vetorial de uma variável, curva em $\mathbb{R}^n$. Integral dupla e aplicações)

- 1) Determine uma função vetorial $F: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que o traço de F seja:
a) a parábola $y = x^2 + 3$. b) a elipse $(x-1)^2/4 + (y+2)^2/9 = 1$ c) a cardióide de equação polar $r = 2(1-\cos\theta)$.
- 2) Determine uma função vetorial $F: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que o traço de F seja:
a) a elipse $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$. b) a circunferência $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + z = 0 \end{cases}$.
- 3) Escreva as equações da reta tangente e do plano normal à curva dada por:
a) $r(t) = (e^{3t}, e^{-3t}, 3\sqrt{2}t)$, no ponto $(e^3, e^{-3}, 3\sqrt{2})$.
b) $F(t) = (t^2-1, t^2+1, 3t)$, no ponto onde tal curva intercepta o plano $3x-2y-z+7=0$.
- 4) Uma partícula move-se no espaço com equação $R = (\cos(2t), \sin(2t), t/2)$.
a) Represente a órbita da partícula. b) Calcule os vetores velocidade e aceleração da partícula no início do movimento. c) Mostre que os vetores velocidade e aceleração têm comprimentos constantes. d) Mostre que a velocidade e a aceleração fazem um ângulo constante com eixo Oz em qualquer instante t.
- 5) Seja $F(t)$ o vetor posição de uma partícula que se desloca sobre uma esfera de centro na origem e raio r. Mostre que o vetor velocidade é ortogonal ao vetor posição $F(t)$ em cada instante.
- 6) Dada uma curva parametrizada $R = P(t)$ e um ponto fixo Q, demonstre que se as distâncias $|P(t)-Q|$ atingem um mínimo para t_0 então $P(t_0)-Q$ é ortogonal a $P'(t_0)$.
- 7) a) Obtenha uma curva parametrizada $X(t)$ tal que $X(0) = (1,0,1)$, $X'(0) = (2,1,5)$ e $X''(t) = (e^t, t, 1)$, para todo t.
b) Encontre a equação do movimento de um projétil disparado da origem com um ângulo de 60° com a horizontal e velocidade escalar inicial de 800 m/s. Considerando que a única força atuando no projétil é a gravidade, $\vec{f} = (0, -mg) = m\vec{a}$, e que é lançado da origem no instante $t = 0$, determine o vetor posição $\mathbf{R}$ da partícula e mostre que a trajetória está sobre uma parábola (pag. 740 - Munem) (Encontre a equação do movimento no caso mais geral, considerando um ângulo θ com a horizontal e velocidade escalar inicial v_0).
- 8) Enrola-se um pedaço de arame em forma de uma hélice circular uniforme ($F(t) = (\cos(t), \sin(t), bt)$) com 3cm de raio e 20cm de altura. Determine o comprimento do arame se ele contém 6 voltas completas.
- 9) Determine o comprimento de arco das curvas:
a) $F(t) = (\cos(t), \ln \cos(t), \sin(t))$, entre os pontos correspondentes a $t = 0$ e $t = \pi/4$.
b) $F(t) = (3\cos(t), 4\cos(t), 5\sin(t))$, entre os pontos correspondentes a $t = 0$ e $t = 2$.
c) $y = 2\cosh(x/2)$ (catenária), entre os pontos correspondentes a $x = 0$ e $x = 8$.
d) $F(t) = (r(t-\sin(t)), r(1-\cos(t)))$ (ciclóide), entre os pontos correspondentes a $t = 0$ e $t = 2\pi$.



10) Reparametrize pelo comprimento do arco a curva

a) $F(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$. b) $F(t) = (1+e^t, e^t, 2+e^t)$, $t \in [0, 1]$.

11) Seja $\mathbf{R} = F(t)$ a equação do movimento de uma partícula com velocidade não nula. Mostre que a norma do vetor velocidade é constante se, somente se, a aceleração é ortogonal à velocidade.

12) Dê exemplo, caso exista, de uma equação de movimento de uma partícula tal que:

a) O módulo da velocidade seja constante mas a velocidade não seja constante. (justifique).

b) A trajetória esteja sobre uma reta mas a velocidade da partícula não seja constante (justifique).

13) Considere a curva parametrizada F , duas vezes diferenciável, e a mudança de parâmetro $t = g(r) = \sinh(r)$. Pode-se afirmar que $(F \circ g)''(r) = F''(t) \cdot \cosh(r) - F'(t) \cdot \sinh(r)$?

14) Determine a equação dos planos osculador, normal e retificante à curva dada por

a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^2)$, para $t=1$.

b) $F(t) = (t^2-1, t^2+1, 3t)$, no ponto onde tal curva intercepta o plano $3x-2y-z+7=0$.

15) a) Determine o ângulo de interseção entre as curvas $(e^t, e^{2t}, 1-e^t)$ e $(t, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ no ponto $(1, 1, 0)$.

b) Verifique que a curva $F(t) = (t^2, t^3-4t)$ se auto-intercepta. Determine ângulo entre as tangentes a esta curva no ponto de auto-interseção.

16) Determine os vetores unitários $\mathbf{T}$ (tangente), $\mathbf{N}$ (normal), $\mathbf{B}$ (binormal), a curvatura $\mathbf{k}$ das curvas parametrizadas:

a) $P(t) = (\cos(t), \sin(t), bt)$ (hélice);

b) $P(t) = (t^2-3, t^2+7, t^2+t)$.

17) a) Mostre que se $\mathbf{R} = F(t)$ é a equação do movimento de uma partícula com aceleração nula ($F''(t) = \mathbf{0}$) então o movimento é retilíneo.

b) Seja $F(s)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Mostre que o traço de F está sobre uma reta se e somente se $k(s) = 0$, $\forall s \in D(F)$, sendo $k(s)$ a curvatura.

18) Dê a interpretação geométrica das integrais:

a) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{3\cos(2\theta)} r dr d\theta$, c) $\iint_U \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \right) dx dy$, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. b) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \right) \right] dx dy$.

19) Calcule as seguintes integrais duplas:

a) $\iint_U \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, onde U é a região limitada pelo laço da rosácea $r = 2\cos(2\theta)$ que está no 1º e no 4º quadrantes. Dê a interpretação geométrica.

b) $\iint_U \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, onde U é a região limitada pela circunferência $C_1: x^2 + y^2 = 4$.

c) $\iint_U xy dx dy$, onde U é a região limitada pela circunferência $C_2: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

d) $\iint_U \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right)^5 dx dy$, onde U é a região limitada pela elipse $E: (x^2/4) + (y^2/9) = 1$.

e) $\iint_U y dx dy$, onde U é a região limitada pela elipse $E_2: 7x^2 + 7y^2 - 2xy = 24$. Sabe-se que $g(u,v) = (\frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v, \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v)$ leva a elipse $E_1: (u^2/4) + (v^2/3) = 1$ na elipse E_2 .

20) Considere o parabolóide $z = -x^2 - y^2 + 4$. Calcule os volumes V_1 e V_2 , onde V_1 é o sólido limitado pelo parabolóide e pelo plano $z = 0$ e V_2 é o sólido limitado pelo parabolóide e pelos planos $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, $z = 0$

21) Utilizando integral dupla, calcule os volumes dos seguintes sólidos:

- a) limitado pelos planos $x + y + 2z = 4$ e $z = 0$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- b) limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, pelo plano $z = 0$ e pelo cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$. (*)
- c) limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e pelo cilindro (parte interna) $x^2 + (y-a)^2 = a^2$, acima do plano $z = 0$. (**)
(Piskunov, vol.2)



- d) limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ (parte interna) e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
- e) limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 2x + 1$.
- f) limitado pelo parabolóide $z = x^2 + 2y^2$ e pelo plano $z = 4y + 2$.

(*), (**) Nestes casos, pode-se fazer uma translação e utilizar coordenadas polares ou utilizar apenas coordenadas polares observando que, no plano, $(x-1)^2 + y^2 = 1$ corresponde a $r = 2\cos\theta$ e $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ corresponde a $r = 2a\sin\theta$.

22) Uma vasilha tem a forma da superfície $z = \left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} \right)^3$.

Qual o volume de água que cabe na vasilha para a altura correspondente a 8 unidades de comprimento?

23) Utilizando integral dupla, calcule as áreas das seguintes regiões planas, limitadas pelas curvas:

- a) $y^2 = 2x$, $y = x$. b) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. c) $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$. d) $r = 2\cos\theta$, $r = 4\cos\theta$.

24) Considere uma lâmina que ocupa o quadrado Q com vértices $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a) , $(0,a)$ e que tem densidade em $P(x,y)$ igual ao produto das distâncias de P aos eixos coordenados. Determine a massa e as coordenadas do centro de massa da lâmina. (Simmons, vol. 2)

25) Determine a massa de uma placa redonda de raio R se a densidade δ do material em cada ponto P é proporcional à distância do ponto P ao centro da placa. (Piskunov, vol.2)

26) Determine as coordenadas do centróide das seguintes regiões planas.

- a) limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.
- b) limitada pelo triângulo isósceles com vértice na origem, eixo Ox como suporte da mediana da base e altura igual a h .

27) Use o teorema de Pappus para calcular:

O volume do sólido obtido pela rotação da região $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 = 1\}$, em torno da reta $l: x + y = 3$, sabendo que o centróide é a origem.

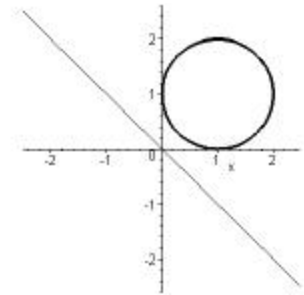
28) Determine o momento de inércia das seguintes regiões planas, com densidade constante σ_0 ,

a) limitada pelas curvas $x = y^2$ e a reta $x = 1$, em relação à reta $y = 1$.

b) disco de raio a , em relação a uma reta que contém um diâmetro.

29) Calcule o momento de inércia da placa plana com formato do disco de centro $(1,1)$ e raio igual a 1, em relação à reta $y = -x$, sabendo

que a densidade é $\sigma(x,y) = \frac{1}{x+y}$.



Respostas

1)a) $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^2 / F(t) = (t,t^2+3)$	1)b) $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^2 / F(t) = (2\cos t + 1, 3\sin t - 2)$ (ou, $F:[0,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}^2$)			
1)c) $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^2 / F(\theta) = (2(1-\cos\theta)\cos\theta, 2(1-\cos\theta)\sin\theta)$	2)a) $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^3 / F(t) = (\cos t, \sin t, 4 - \cos t - \sin t)$ (ou, $F:[0,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}^3$)			
2b) $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^3 / F(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2\sin t, -\sqrt{2} \cos t)$ (ou, $F:[0,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}^3$)	3a) reta tang. $X = (e^3, e^{-3}, 3\sqrt{2}) + \lambda(e^3, -e^{-3}, \sqrt{2}), \lambda \in \mathbb{R}$ pl. normal: $e^3 x - e^{-3} y + \sqrt{2} z - 6e^6 + e^{-6}$			
3b) Em $F(1)$: reta tangente: $X = (0, 2, 3) + \lambda(2, 2, 3), \lambda \in \mathbb{R}$ plano normal: $2x + 2y + 3z - 13 = 0$	em $F(2)$: reta tangente: $X = (3, 5, 6) + \lambda(4, 4, 3), \lambda \in \mathbb{R}$ plano normal: $4x + 4y + 3z - 50 = 0$			
4) b) $R'(0) = (0, 2, 1/2), R''(0) = (-4, 0, 0)$	4)c) $ R'(t) = \sqrt{17}/2, \forall t, R''(t) = 4, \forall t$			
4)d) $(R'(t), (0, 0, 1)) = \arccos(\sqrt{17}/17), \forall t$	$(R''(t), (0, 0, 1)) = \pi/2, \forall t$			
7)a) $(t + e^t, t + t^3/6, 1 + 5t + t^2/2), t \in \mathbb{R}$	7)b) $R = (400t, -gt^2/2 + 400\sqrt{3}t)$			
parábola: $y = -\frac{g}{320000}x^2 + \sqrt{3}x$	geral: $R = ((v_0 \cos \theta)t, -gt^2/2 + (v_0 \sin \theta)t)$			
8) $4\sqrt{81\pi^2 + 25}$	9)a) $\ln(1 + \sqrt{2})$	9b) 10	9)c) $2\sinh 4$	9)d) $8r$
10)a) Sendo $s \in \mathbb{R}, a = \text{cte}$: $\tilde{F}(s) = \left(\cos\left(\frac{s+a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s+a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{s+a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \right)$	10)b) $\tilde{F}(s) = \left(2 + \frac{s}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{s}{\sqrt{3}}, 3 + \frac{s}{\sqrt{3}} \right),$ $s \in [0, \sqrt{3}(e-1)]$			
14) a) pl. normal: $x + 2y + 2z - 5 = 0$ pl. osculador: $-y + z = 0$ pl. retificante: $4x - y - z - 2 = 0$	14b) Em $F(1)$: pl. normal: $2x + 2y + 3z - 13 = 0$ pl. osculador: $-x + y - 2 = 0$ pl. retificante: $-3x - 3y + 4z - 6 = 0$			
Em $F(2)$: pl. normal: $4x + 4y + 3z - 50 = 0$ pl. osculador: $x - y + 2 = 0$ pl. retificante: $3x + 3y - 8z + 24 = 0$	15)a) $\arccos \frac{1+2\pi}{\sqrt{6}\sqrt{1+4\pi^2}}$ 15b) $\arccos(3/5)$			
16)a) $T = (-\sin t, \cos t, b)/\sqrt{a^2 + b^2}$ $N = (-\cos t, \sin t, 0)$	16)b) $T(2t, 2t, 1 + 2t)/\sqrt{12t^2 + 4t + 1}$ $N = (1 + 2t, 1 + 2t, -4t)/\sqrt{24t^2 + 8t + 2}$			

$$\mathbf{B} = \frac{a}{|a|\sqrt{a^2+b^2}}(b \sin t, -b \cos t, a)$$

$$\mathbf{k} = \frac{|a|}{a^2+b^2}$$

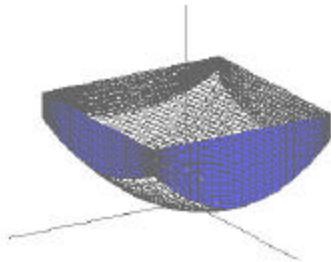
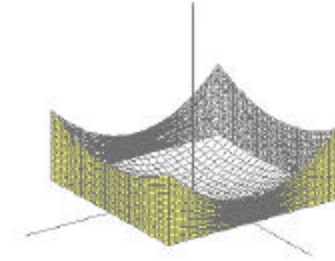
$$\mathbf{B} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\mathbf{k} = 2\sqrt{2} / \left(\sqrt{12t^2 + 4t + 1} \right)^3$$

18)c) volume do sólido limitado pelo parabolóide

$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9}$ e pelos planos: $z=0$, $x=1$, $y=1$, $x=-1$, $y=-1$

18)a) área de uma pétala da rosácea $r = 3\cos(2\theta)$



18)b) volume do sólido limitado pelo parabolóide

$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9}$ e pelos planos: $z=1$, $x=1$, $y=1$, $x=-1$, $y=-1$

ou,

volume do sólido limitado pelo parabolóide

$z = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}$ e pelos planos $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, e $z = 0$.

19)a) 16/9 **19)b)** $16\pi/3$ **19)c)** $4\pi ab$

19)d) π **19)e)** 0

20) $V_1 = 8\pi$ $V_2 = 40/3$

21)a) 2π **21)b)** $3\pi/2$

21)d) $\pi(8\sqrt{2}-7)/6$ **21)e)** 2π

21)f) $4\sqrt{2}\pi$

23)a) $2/3$ **23)b)** πab

23)c) a^2 **23)d)** 3π

24) $a^4/4$, $(2a/3, 2a/3)$ **25)** $2k\pi R^3/3$

26)a) $(9/20, 9/20)$ **26)b)** $((2/3)h / 0)$

27) $3\pi^2\sqrt{2}/2$

28) a) $8\sigma_0/5$ **28) b)** $\sigma_0\pi a^4/4$